Liceo Scientifico “A. Einstein”, Palermo

Programma svolto di *Matematica* a.s. 2023-’24

Classe: 1L - Cambridge

Materia: *Matematica* Docente: *Fabio Calabrese*

Presentazione del corso: finalità e metodi."Essenza" ed "Essenza necessaria" o “Sostanza". Ricerca dell’essenza come modello di ricerca scientifica.

Le lettere greche.

Prima terminologia insiemistica (es. rappresentazione per elencazione, simbolo di appartenenza) e matematica generale (es. simbolo di definizione). I quantificatori: “Esiste” e “Per ogni”. “O” esclusivo (Aut) e “O” inclusivo (Vel).

Introduzione alla struttura assiomatico-deduttiva della matematica: Enti primitivi, Assiomi/Postulati, Definizioni, Teoremi (Ipotesi=>Tesi). L’implicazione logica e sua non reversibilità.

Strutture assiomatico-deduttive non specificamente matematiche (dama, battaglia navale, esempio di logica proposizionale) (p. 739 nn. 14-18).

Parte I - Insiemi numerici e algebra, insiemistica, logica.

Introduzione agli insiemi numerici. Definizione di operazione. Operazioni interne e non.

I numeri naturali e numeri interi

L’insieme N. Precedente e successivo. Rappresentazione in semiretta orientata. Esistenza del minimo e inesistenza del massimo. Ordinamento totale (con esempio di ordinamento non totale). I simboli di ordinamento. Il simbolo di "compreso".

Le quattro operazioni in N. Terminologia. Le proprietà commutative e associative. Le proprietà distributive a destra e sinistra della moltiplicazione e a destra della divisione. Legame di queste proprietà con la proprietà commutativa.
Proprietà invariantive della sottrazione e della divisione.

Operazioni interne e non. Elementi neutri.

Elemento assorbente della moltiplicazione. Legge di annullamento del prodotto. La legge di annullamento del prodotto come proprietà inversa della proprietà assorbente. Un esempio di insieme dotato di operazione per cui non vale la legge di annullamento.

Multipli e divisori di un numero naturale. I criteri di divisibilità. I numeri primi. Dimostrazione dell'infinità dei numeri primi. Il teorema fondamentale dell'aritmetica.
Minimo comune multiplo (m.c.m.) e Massimo comune divisore (M.C.D.). Numeri primi fra loro (coprimi). Problemi che hanno come modello il calcolo dell'm.c.m. e dell'M.C.D.

L'elevazione a potenza.

Espressioni. Problemi risolvibili tramite l'uso dei numeri naturali.

La divisione con resto.

Ampliamento di N per ottenere un insieme chiuso rispetto alla differenza: l'insieme dei numeri interi relativi Z. -a come numero dal segno non definito, opposto di a.
Rappresentazione sulla retta e ordinamento completo.
Definizione di valore assoluto.

Le quattro operazioni in Z e le loro proprietà.

L'elevazione a potenza in Z.

Espressioni in Z. Problemi risolvibili tramite l'uso dei numeri interi relativi.

Insiemi

Cos'è un insieme. Gli insiemi uguali. Le rappresentazioni degli insiemi: per elencazione, caratteristica e secondo diagramma di Eulero-Venn. Cardinalità di un insieme.

I sottoinsiemi. L'insieme vuoto. Sottoinsiemi banali e propri. L'inclusione stretta come relazione di ordinamento parziale.

Le operazioni con insiemi: l'intersezione, l'unione e la differenza fra insiemi, l'insieme complementare. Proprietà delle operazioni fra insiemi. Le leggi di De Morgan per gli insiemi.

L'insieme delle parti di un insieme. Cardinalità dell'insieme delle parti. La partizione di un insieme.

Gli insiemi come modello per risolvere i problemi.

Il prodotto cartesiano fra due insiemi. Rappresentazioni del prodotto cartesiano di due insiemi: tabella a doppia entrata, diagramma cartesiano. Il prodotto cartesiano di più insiemi.

Numeri razionali e introduzione ai numeri reali

Le frazioni.

Le frazioni. Proprietà invariantiva delle frazioni. Le frazioni equivalenti e la riduzione di una frazione. Il confronto tra frazioni col metodo di ricondurre allo stesso denominatore e col metodo del prodotto in croce.

Addizione e sottrazione di frazioni. Scomposizione di una frazione in somma di parte intera e parte frazionaria (frazione propria). Moltiplicazione e divisione fra frazioni. Potenze di frazioni con esponente naturale e intero.

Problemi risolvibili tramite le frazioni.

Rappresentazione di frazioni tramite numeri decimali.

Numeri decimali finiti e periodici.

Dimostrazione che una frazione dà luogo a un numero decimale periodico. Dimostrazione che il numero di cifre del periodo è al più pari a quello del denominatore meno 1. Regola per ricavare se una frazione dà luogo a un numero decimale finito, periodico semplice o periodico misto.

Dai numeri decimali alle frazioni, la frazione generatrice.
Identità fra 0,9 periodico e 1.

Approssimazione: troncamento e arrotondamento.

Rapporti, proporzioni e percentuali.

Le proporzioni e le loro proprietà.
Le percentuali. Incrementi e decrementi percentuali.
Problemi risolvibili tramite proporzioni e percentuali.

I numeri razionali.

L’insieme Q_a dei numeri razionali assoluti come insieme quoziente dell’insieme delle frazioni rispetto alla relazione di equivalenza tra frazioni (un dato numero razionale assoluto è quindi una specifica classe di equivalenza di frazioni equivalenti, ognuna di queste frazioni può essere presa come rappresentante).

Dai numeri razionali assoluti ai numeri razionali. Corrispondenza dei primi (senza segno) a un sottoinsieme dei secondi (con segno +).

La rappresentazione dei numeri razionali sulla retta. Ordinamento e caratteristiche di Q. Dimostrazione che i razionali sono densi, ossia che fra due razionali ve n’è almeno un altro e, come conseguenza, che ve ne sono infiniti.

Addizione, sottrazione moltiplicazione in Q. L'esistenza del reciproco e l'operazione di divisione. Le potenze in Q.
La notazione scientifica. L'ordine di grandezza.

Dimostrazione che radice quadrata di 2 non è un numero razionale. La crisi degli irrazionali nella scuola pitagorica.
Definizione dei numeri irrazionali come decimali non periodici (e quindi non razionali).
I numeri reali. Ripresa della densità e dell'incompletezza di Q con conseguente densità di R. Completezza di R sul piano assiomatico e sua corrispondenza con la retta della geometria euclidea.

Analogie e differenze fra le strutture algebriche di (R,+,*) e (A,∩,∪) (i.e. insiemi con le operazioni di unione e intersezione).

Logica (con approfondimenti)

La logica delle proposizioni

Le proposizioni. I connettivi: non, e (et), o (vel), l'o esclusivo (aut).
I connettivi di implicazione: "se…allora", "solo se" e "se e solo se". Le tavole di verità. L'equivalenza logica. Le leggi di De Morgan per le proposizioni.
Le regole di deduzione: *Modus ponens*, *modus tollens* e sillogismo ipotetico. Le tautologie.

La logica dei predicati

I predicati. L'insieme di verità.
Corrispondenza fra: 1) implicazioni tra predicati - insiemi e sottoinsiemi;
2) connettivi tra predicati - operazioni fra insiemi.

I quantificatori universali ed esistenziali. La negazione di enunciati contenenti quantificatori.

Approfondimenti

Sintassi e semantica. Implicazione diretta e contronominale. Implicazione come nonAoB. Negazione dell'implicazione. Le dimostrazioni per assurdo. Esercitazione su dimostrazioni algebriche per assurdo (Ess. p.785 nn. 47 e 48.).

Significato insiemistico della nomenclatura aristotelica di: "Premessa maggiore" e "Premessa minore". I teoremi e le dimostrazioni nel quadro della logica aristotelica.

Parallelismo logica - insiemistica: o/unione, e/intersezione, non/complementare, implicazione/complementare della differenza.

Relazioni

Il concetto di relazione. Immagini e controimmagini. Dominio e insieme immagine. Le rappresentazioni di una relazione (4 tipologie). Definizione formale di relazione.

Esempio di corrispondenza fra relazioni e logica: i predicati nella forma X predicato Y.

Relazioni di un insieme in sé.

I grafi.

Proprietà delle relazioni: riflessività e antiriflessività, simmetria e antisimmetria, transitività.

Le relazioni di equivalenza. Le relazioni di equivalenza e il loro legame con le partizioni: classi di equivalenza e l'insieme quoziente. Dimostrazione che una relazione di equivalenza dà luogo a una partizione in cui i sottoinsiemi della partizione sono le classi di equivalenza della relazione.
Il concetto di equipollenza. Verifica che si tratta di relazione di equivalenza. Definizione di vettore come classe di equivalenza di vettori equipollenti.

Relazioni d'ordine. Relazioni d'ordine stretto e largo. Relazioni d'ordine parziale e totale.

Introduzione al calcolo letterale e monomi

Il calcolo letterale e le espressioni algebriche. Espressioni algebriche intere e frazionarie, razionali e irrazionali. Valore numerico di una espressione algebrica.

Monomi. Monomi in forma normale, coefficiente e parte letterale. Monomi simili, uguali, opposti. Caratterizzazione degli zeri di un monomio.

Operazioni con monomi: addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza. Divisibilità di monomi, divisione fra monomi. M.C.D. e m.c.m. di monomi.

Il calcolo letterale e i monomi per risolvere i problemi.

Polinomi

Definizione di polinomio. Notazione funzionale di un polinomio. Zeri di un polinomio. Termini e forma normale di un polinomio. Grado di un polinomio. Polinomi omogenei, simmetrici, ordinati, completi.

Addizione, sottrazione e moltiplicazione fra polinomi. Interpretazione geometrica del prodotto di due binomi.

I prodotti notevoli: somma di monomi per la loro differenza, quadrato del binomio, quadrato del trinomio, cubo del binomio. Il triangolo di Tartaglia (/ triangolo di Pascal / Binomio di Newton) e la potenza n-ma del binomio.

Espressioni con prodotti notevoli.

Polinomi per risolvere problemi e per dimostrare.

Divisibilità fra polinomi

Definizione di divisibilità dei polinomi. Criterio di divisibilità di un polinomio per un monomio. Definizione di divisione con resto fra due polinomi.
Il procedimento (euclideo) per la divisione di due polinomi.
La regola di Ruffini.
Il teorema del resto. Il teorema di Ruffini. Teoria ed esercitazione con parametri.

Scomposizione dei polinomi

Il problema generale della scomposizione di polinomi. Utilità teoriche e di calcolo nella risoluzione di equazioni e nella semplificazione di frazioni algebriche.

Polinomi riducibili e irriducibili.
Il raccoglimento (totale) a fattor comune. Il raccoglimento parziale.
La scomposizione tramite i prodotti notevoli. Somma e differenza di cubi.
Il trinomio speciale con coefficiente del termine di secondo grado pari a 1 e diverso da 1.
Scomposizione dei polinomi tramite il Teorema e la regola di Ruffini.
Il teorema degli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi.
La scomposizione di un polinomio tramite il teorema degli zeri razionali e la regola di Ruffini.
M.C.D. e m.c.m. di polinomi.

Calcolo di espressioni numeriche tramite scomposizione di polinomi (es. p. 538 n. 287).

Frazioni algebriche

Definizione di frazione algebrica.

Cenni alla struttura algebrica dei polinomi e delle frazioni algebriche:
- Corrispondenza fra le proprietà delle operazioni in Z con quelle sull’insieme dei polinomi (divisione con resto).

- Corrispondenza fra le proprietà delle operazioni sull'insieme delle frazioni con quelle sull'insieme delle frazioni algebriche (divisione interna).

Condizioni / Campo di esistenza di una frazione algebrica.
Frazioni algebriche equivalenti. Dimostrazione della proprietà invariantiva delle frazioni algebriche a partire dalla definizione di frazioni algebriche equivalenti.
Condizioni di esistenza per frazioni equivalenti. Il segno dei termini di una frazione algebrica.
Semplificazione delle frazioni algebriche.

Addizione e sottrazione di frazioni algebriche. Moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza di frazioni algebriche.
Espressioni con frazioni algebriche.

Equazioni di primo grado numeriche intere

Le equazioni. Equazioni intere e fratte, numeriche o letterali. Insieme di definizione (dominio) di un'equazione e soluzioni. Equazioni equivalenti. Equazioni determinate, indeterminate e impossibili. Le identità. Relazione fra identità ed equazioni indeterminate.

Proprietà di addizione e moltiplicazione delle uguaglianze. Primo e secondo principio di equivalenza delle equazioni. Discussione sul ruolo delle ipotesi nei principi di equivalenza. La regola del trasporto e altre conseguenze dei principi di equivalenza.

Forma normale e grado di un'equazione. Il monomio nullo come monomio di grado indefinito. Conseguenze del teorema fondamentale dell'algebra nella classificazione delle equazioni algebriche espresse in forma normale (equazioni determinate o impossibili).

Il procedimento risolutivo delle equazioni di primo grado numeriche intere (a coefficienti interi e frazionari). Il caso delle delle equazioni impossibili e indeterminate.

Problemi che hanno come modello le equazioni di primo grado.

Ricerca delle soluzioni di un'equazione algebrica di grado superiore al primo tramite scomposizione in fattori (Unità 11, p. 523).
Confronto fra metodi di risoluzione di equazioni tramite scomposizione in fattori o altro (Es. p. 548 n. 528).

Equazioni di primo grado frazionarie e letterali

Equazioni di primo grado frazionarie.

Equazioni di primo grado letterali intere.

Equazioni di primo grado letterali frazionarie o con parametri al denominatore.

Equazioni letterali e formule.

Problemi che hanno come modello equazioni di primo grado frazionarie e letterali.

Parte II - Geometria

Piano euclideo

Introduzione alla geometria Euclidea. Le rappresentazioni grafiche in geometria. Descrizione di una figura geometrica. Le figure non devono contenere proprietà non dichiarate.

Struttura assiomatico-deduttiva della geometria: enti fondamentali / concetti primitivi. Assioma 1 (Piano insieme di punti. Retta sottoinsieme del piano). Assioma 2 (tre assiomi di appartenenza alla retta). Assioma 3 (due assiomi d'ordine della retta).
Corollari dei primi tre assiomi della geometria: Ogni retta è un insieme di punti; la retta contiene infiniti punti; la retta è un sottoinsieme proprio del piano; la rappresentazione di Z non è una retta.
Definizione di fascio proprio di rette.

Le parti della retta. La semiretta. Il segmento. Prolungamento di un segmento. Segmenti consecutivi e adiacenti. Poligonale (vertici, lati, aperta, chiusa, intrecciata).

Figure concave e convesse. Assioma di partizione del piano da parte di una retta. Semipiani. Angoli. Angoli consecutivi, adiacenti, opposti al vertice. Poligoni. Ulteriori definizioni (diagonale, corda, angolo interno o esterno).

Dalla congruenza alla misura (con approfondimenti)

Il concetto di congruenza come movimento rigido. Definizione assiomatica della congruenza: proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva della congruenza; congruenza di punti, rette, semirette, piani e semipiani; trasporto di segmenti e angoli.

Congruenza, confronto e misura di segmenti
Il confronto fra segmenti. Somma, differenza, multipli e sottomultipli di segmenti congruenti. Divisibilità di un segmento e punto medio. La misura dei segmenti:

caso commensurabile (misure razionali) e caso incommensurabile (misure irrazionali). Assioma di continuità della retta.

Cenni storici
La scuola pitagorica e la sua crisi; la geometria egizia, la geometria greca, la formalizzazione di Euclide. La questione dei postulati, cenni alla geometria sulla sfera. Il ruolo della scuola araba e di Cartesio.

Approfondimento sulla retta reale
La misura di un segmento come relazione fra la geometria e gli insiemi numerici. Corrispondenza fra numeri razionali e segmenti commensurabili. Corrispondenza fra numeri irrazionali e segmenti incommensurabili. Ripresa della fondazione assiomatica dei numeri reali sulla geometria: completezza di R come conseguenza dell'assioma di continuità della retta. Esistenza di fondazioni assiomatiche di R indipendenti dalla geometria.

Congruenza, confronto e misura di angoli
Confronto fra angoli. Somma, differenza, multipli e sottomultipli di angoli congruenti. La bisettrice di un angolo. Angoli particolari e terminologia (angolo retto, piatto, giro; angolo acuto, ottuso; angoli complementari, supplementari ed esplementari).
Teoremi sugli angoli: angoli complementari / supplementari ad angoli congruenti sono complementari / supplementari; congruenza degli angoli opposti al vertice.
La misura degli angoli.

La congruenza nei triangoli

I triangoli. Terminologia. Classificazione. Segmenti notevoli (bisettrice, mediana, altezza).
La congruenza nei triangoli.
Il primo criterio di congruenza (assioma). Controesempio per angolo non compreso fra i lati congruenti.
Le dimostrazioni per assurdo. Il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Definizione di triangolo isoscele. Il teorema diretto del triangolo isoscele. Proprietà del triangolo isoscele. Il teorema inverso del triangolo isoscele.

Il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

Le disuguaglianze nei triangoli.
Il teorema dell'angolo esterno e suoi corollari.
Il teorema di relazione fra lati e angoli opposti di un triangolo e suoi corollari.
La disuguaglianza triangolare.

Costruzioni con riga e compasso: Trasporto di un angolo, punto medio di un segmento, bisettrice di un angolo.

Le dimostrazioni e i problemi con congruenza e disuguaglianze nei triangoli.

Rette perpendicolari e rette parallele

Rette perpendicolari.

Teorema di esistenza della perpendicolare passante per un punto: dimostrazione tramite costruzione.
Teorema di unicità della perpendicolare passante per un punto.

L’asse di un segmento.
La proiezione di un punto e di un segmento. Distanza di un punto da una retta.

Definizione di rette parallele. Teorema delle rette perpendicolari alla stessa retta. L’assioma della parallela (quinto postulato di Euclide). Transitività della relazione di parallelismo. La direzione come classe di equivalenza di rette parallele.

Rette incidenti a un fascio improprio.
Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale. I criteri di parallelismo.
Costruzione della parallela con riga e compasso.

Parte III - Miscellanea

Introduzione all’informatica

Introduzione all’informatica. La programmazione. Linguaggi di programmazione interpretati e compilati. Codice sorgente ed eseguibile.

Applicazione della logica alla programmazione.

Introduzione al software Geogebra.

Introduzione all’elaborazione di testo per l’editoria scientifica.

Metodo di studio

Sono state affrontate le schede relative di fine capitolo.

An introduction to Mathematics in CLIL

A short account on British educational system. A didactic approach proposal for the development of mathematical modules. A first dictionary.

The Fibonacci sequence. Class exercises on binomial expansion and Pascal's Triangle.

Libri di testo

Sasso Leonardo, Zanone Claudio
Tutti i Colori della Matematica - Edizione Blu - Primo biennio - Volume 1 + Quaderno di inclusione e recupero1 + Ebook.
Dea Scuola - Petrini
9788849425154

Dispense del docente (spec. lavagne di lezione condivise)
Materiale da internet

Palermo, 8/6/2024

Il docente

Prof. Fabio Calabrese